Grado en Física

Ejercicios de Análisis Matemático I

1. Una corona circular de radio interior $\sqrt{2}$ y radio exterior $\sqrt{6}$ se corta con la parábola de ecuación $y^2 = x$. Calcula el área de cada una de las dos regiones resultantes.

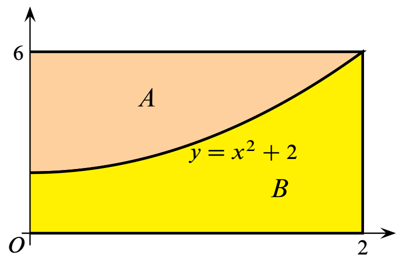
2. Calcula el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje de ordenadas la región del plano limitada por la curva de ecuación $y = \operatorname{sen} x$ para $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, el eje de ordenadas y la recta $y = 1$.

3. Calcula el volumen del sólido engendrado al girar la región del plano limitada por las parábolas $y = x^2$, $x = y^2$ alrededor de la recta $x = 4$.

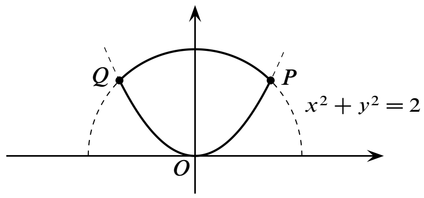
4. Calcula el volumen del sólido engendrado al girar la región del plano limitada por la parábola $y^2 - x - 3 = 0$ y la recta $2y - x = 0$ alrededor del la recta $y = 4$.

5. Calcula el área de la intersección de los círculos centrados en $(0,1)$ y $(1,0)$ y de radio 1. Calcula, por el método de los discos o arandelas y por el método de las tubos o de las capas, el volumen del sólido engendrado al girar dicha región alrededor del eje de abscisas.

6. Calcula el volumen del sólido obtenido al girar las regiones A y B de la figura alrededor de cada una de las rectas: $x = 0$, $x = -3$, $x = 2$, $y = 0$, $y = -2$, $y = 6$.



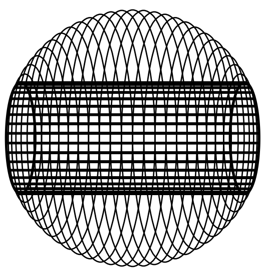
7. Sean P y Q los puntos de corte de la curva $y = x^2$ con la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$. Calcula la longitud de la curva $OPQO$ formada con los correspondientes trozos de las curvas anteriores, siendo O el origen de coordenadas.

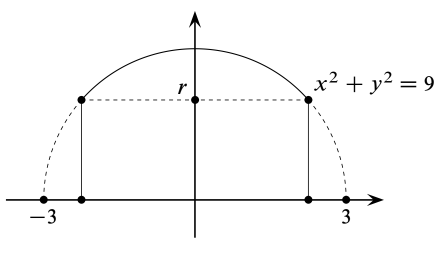


8. a) Calcula, por el método de los discos o arandelas y por el método de las láminas o capas, el volumen de una esfera de radio 3 en la que, siguiendo un diámetro, se ha perforado un agujero cilíndrico de radio $r < 3$.

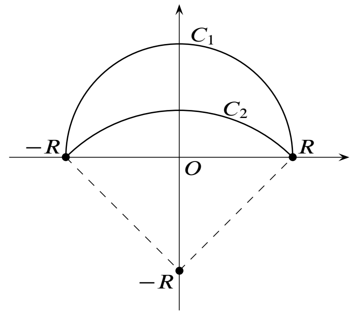
   b) Calcula el área de la superficie total del solido obtenido.

   c) Calcula los valores de r para los que dicha área alcanza sus valores extremos.

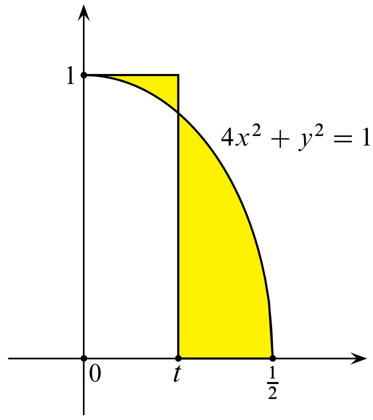




9. Calcula el área de la luna formada por la intersección de la parte superior de los círculos C_1 de centro el origen y radio R y C_2 de centro $(0,-R)$ y radio $\sqrt{2}R$. Calcula el volumen del sólido obtenido al girar dicha luna alrededor del eje de abscisas.



10. Sea $A(t)$ el área de la región del plano (en amarillo en la figura) comprendida entre la elipse de ecuación $4x^2+y^2=1$, la recta horizontal $y=1$ y la recta vertical $x=t$ donde $0\leqslant t\leqslant 1/2$. Se pide calcular los valores máximo y mínimo absolutos de $A(t)$ en el intervalo $[0,1/2]$.



11. Calcula la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

12. Calcula los límites de las siguientes sucesiones expresándolas como sumas de Riemann.

$$a)\ x_n=\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}},\quad (\alpha>0)$$

$$b)\ x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

$$c)\ x_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(n+n)}}$$

$$d)\ x_n=\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+4}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n^2}$$

$$e)\ x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)k}{n^3}$$

13. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

$$a)\ G(x)=\int_0^{x^3}\cos(t^2)\,\mathrm{d}t \qquad b)\ G(x)=\int_{x^2}^{1}\mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}\,\mathrm{d}t$$

$$c)\ G(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2+x}\frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad d)\ G(x)=\int_1^{\mathrm{e}^x}\operatorname{sen}(\log t)\,\mathrm{d}t$$

$$e)\ G(x)=\int_0^{x}\left(\int_1^{y^2}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y \qquad f)\ G(x)=\int_0^{\int_1^x\frac{\operatorname{sen} u}{u}\,\mathrm{d}u}\frac{1}{t^2+\operatorname{sen}^4 t}\,\mathrm{d}t$$

14. Calcula los siguientes límites.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}\operatorname{sen}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^3}\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\displaystyle\int_0^{x}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{x}\mathrm{e}^{t^2}\operatorname{sen}t\,\mathrm{d}t}\qquad c)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}\left(\mathrm{e}^{-t^2}-\mathrm{e}^{-1}\right)\mathrm{d}t}{x\sqrt{x}}$$

$$d)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\displaystyle\int_{x^2}^{x}\frac{\mathrm{e}^t-1}{\operatorname{sen}(t^3)}\,\mathrm{d}t}{\ln x}\qquad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{t}}-1\right)\mathrm{d}t}{x^3}\qquad f)\ \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_1^{x^2+1}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

15. Calcula los límites de las sucesiones:

$$\text{a) } x_n=\frac{1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3}{n^4};\quad \text{b) } x_n=\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(5n)^{3n}}}$$

$$\text{c) } \frac{\dfrac{n}{1}+\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{n-2}{3}+\cdots+\dfrac{3}{n-2}+\dfrac{2}{n-1}+\dfrac{1}{n}}{\log(n!)}$$

$$\text{d) } x_n=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}$$

$$\text{e) } x_n=\left(3\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}\right)^n$$

$$\text{f) } x_n=\frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right)$$

$$\text{g) } x_n=\frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{1/2}+\mathrm{e}^{1/3}+\cdots+\mathrm{e}^{1/n}-n}{\log n};\quad \text{h) } x_n=n\,\frac{\operatorname{arc\,tg}(1/n)-\operatorname{sen}(1/n)}{1-\cos(1/n)}$$

16. Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

$$\text{a) }\sum_{n\geqslant 1}\frac{((3n!))^2}{4^{6n}(n!)^6};\ \text{b) }\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}+(-1)^n};\quad \text{c) }\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{a^n}{n^a}\quad (a\in\mathbb{R})$$

$$\text{d) }\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{n^n}{3^n n!};\quad \text{e) }\sum_{n\geqslant 1}\frac{((n+2)!)^3}{(n+1)^{3n}}9^n;\quad \text{f) }\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\text{g) }\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}};\quad \text{h) }\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{4\cdot 6\cdot 8\ldots(2n+2)}{9\cdot 11\cdot 13\ldots(2n+7)}\right)^{1/2}$$

$$\text{i) }\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\log\frac{3n^2+1}{3n^2+n+7}\right)^{2n^2};\quad \text{j) }\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}\right)^{1/2}\ (a>0,b>0)$$

$$\text{k) }\sum_{n\geqslant 1}\frac{a^n n!}{n^{\alpha}(1+a)\cdot(1+2a)\cdots(1+na)}\quad (a>0,\alpha\in\mathbb{R});\quad \text{l) }\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{(2n)^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\text{m) }\sum_{n\geqslant 1}\log\left(n\ \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right);\quad \text{n) }\sum_{n\geqslant 1}a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

17. Calcula el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\ln(1+x^2)-\cos x}{x^2}$$

Y usa el resultado obtenido para estudiar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

18. Calcula el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{x^n}{n\,\log^2(n)}$$

y su comportamiento en los extremos del intervalo de convergencia.

19. Sea la serie de potencias $\sum_{\geqslant 1}\dfrac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

a) Calcula el radio de convergencia y estudia la convergencia de la serie en los extremos del intervalo de convergencia.

b) Calcula a función suma de la serie.

c) Calcula la suma de la serie $\sum_{\geqslant 1}\dfrac{1}{n(2n-1)}$.

20. Expresa la función suma de las series de potencias $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$, $\sum_{n\geqslant 1} nx^n$, y $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{n}{n+1}x^n$ por medio de funciones elementales y calcula el valor de $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n(n+1)}$.

21. a) Prueba que las funciones f, g, h definidas para $x\in]-1,1[$ por

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

pueden expresarse por medio de ciertas funciones elementales.

b) Sea $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(2n+1)}$ para $-1\leqslant x\leqslant 1$. Prueba que

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{2}{\sqrt{x}}g(\sqrt{x})\quad \forall x\in]0,1[$$
$$\varphi(x)=f(x)-\frac{2}{\sqrt{|x|}}h(\sqrt{|x|})\quad \forall x\in]-1,0[$$

c) Calcula los límites $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(2n+1)}$, y $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(2n+1)}$.

22. Calcula la suma de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ y deduce la igualdad

$$\log 3=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}.$$

Explica con detalle lo que haces.